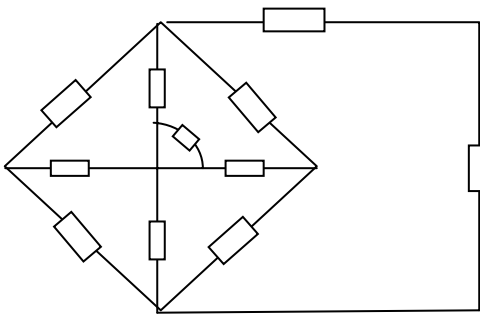


۱- الف- بعضی از جریان های شاخه های مدار نشان داده شده است جریان های i_z, i_y, i_x, i_t را تعیین کنید .

ب- جریان چند شاخه را می توان به صورت دلخواه انتخاب کرد و جریان بقیه شاخه ها را برحسب آن ها بیان نمود؟

پ- اگر بخواهیم i_z, i_y, i_x, i_t متغیرهای مستقل جریان باشند کدام یک از جریانهای شاخه های دیگر را هم می توان به عنوان متغیر مستقل جریان در نظر گرفت؟



حل : برای حل باید kcl را در گروه های زیر نوشت :

۲ گره $kcl : -2 + 1 = i_w \rightarrow i_w = -1A$

۴ گره $kcl : i_y - 3 + 5 = 0 \rightarrow i_y = -2A$

۵ گره $kcl : i_t + 13 = 0 \rightarrow i_t = -13A$

۳ گره $kcl : -1 - 13 = -3 + i_z \rightarrow i_z = -11A$

۷ گره $kcl : i_x = -2 - 2 \rightarrow i_x = -4A$

ب) تعداد متغیرهای مستقل جریان :

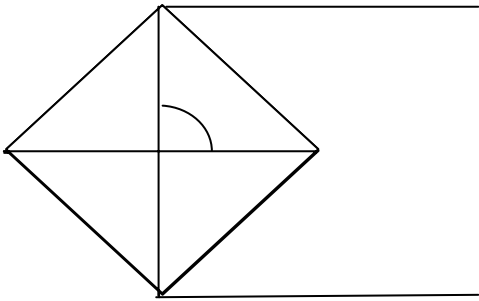
۱+ تعداد گره ها - تعداد شاخه ها = تعداد متغیرهای مستقل جریان

$5 = 11 - 7 + 1 =$ تعداد متغیرهای مستقل جریان

پ) بعد از رسم گراف جریان های داده شده جریان های بعدی باید به گونه ای انتخاب شوند که

هیچ گره ای وجود نداشته باشد که تمام شاخه های آن رنگ شده باشد.

یعنی جریان های (۱-۲)، (۳-۲)، (۳-۴)، یا (۱-۴) را می توان به عنوان متغیر مستقل انتخاب کرد.



۲- الف- در مدار سؤال قبل ولتاژ چند شاخه را می توان به صورت دلخواه انتخاب کرد و ولتاژ

بقیه شاخه ها را برحسب آن بیان نمود؟

ب- فرض کنید جهت های قرار دادی متناظر به کار رفته و عددهای ادا شده در شکل قبل

ولتاژ شاخه ها باشند آیا این ولتاژها برای مشخص کردن ولتاژ تمام شاخه ها کافی است؟

پ- ولتاژ کدام شاخه ها را می توان به مجموع ولتاژهای داده شده اضافه کرد یا یکدسته متغیر

مستقل ولتاژ شاخه بدست آید؟

الف) باید تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ را از فرمول زیر محاسبه کنیم.

$$۶ = ۷ - ۱ = ۱ - \text{تعداد گره ها} = \text{تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ}$$

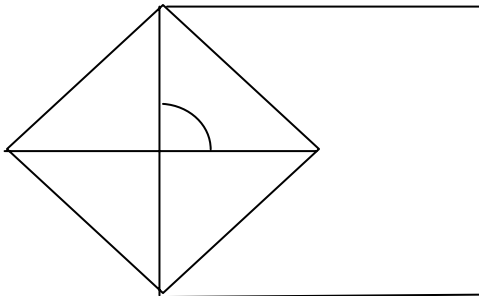
ب) فقط ۵ متغیر مستقل ولتاژ مطرح شده که برای حل مدار حداقل به ۶ متغیر مستقل مورد نیاز

است.

پ) همانند قسمت (ب) سؤال قبل باید گراف شکل را رسم کنیم با این تفاوت که در این

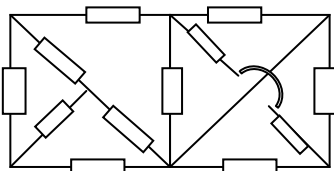
مسئله شاخه های پررنگ نباید تشکیل یک حلقه را بدهند.

یعنی شاخه های (۱-۶)، (۶-۷)، (۳-۶) را می توان انتخاب کرد.



۳- در مدار شکل فرض کنید $i_3 = 5 A$, $i_2 = -4 A$, $i_1 = 3 A$

الف- جریان i_4 را حساب کنی.



ب- آیا می توان جریان شاخه دیگری از این مدار را محاسبه کرد؟

پ- اکنون فرض کنید $i_5 = 3A$ و $i_4 = 4A$ آیا می توان جریان بقیه شاخه ها را محاسبه

کرد؟

حل الف) $i_4 + i_2 + i_1 = i_3 \rightarrow i_4 = i_3 - i_2 - i_1$ در گره مرکب

$$i_4 = 5 + 4 - 3 \Rightarrow i_4 = 6A$$

ب) خیر زیرا گره مرکب دیگری نمی توان یافت که شامل یک جریان مجهول باشد.

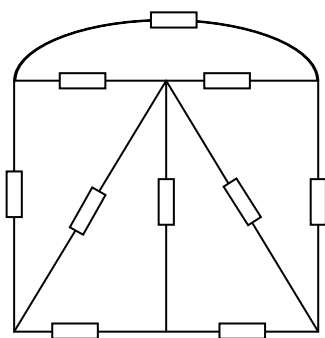
پ) $6 = 1 + 12 - 7 = 6$ = تعداد گره ها - تعداد شاخه ها : تعداد متغیر مستقل جریان شاخه ها

یعنی با داشتن ۶ جریان از جرینها شاخه ها می توان جریان بقیه شاخه ها را محاسبه کرد. ولی با

توجه به قسمت الف) چون یک گره مرکب شامل جریانهای i_1, i_2, i_3, i_4 داریم پس جریان های i_1

تا i_4 مستقل نیستند.

۴- در مدار شکل فرض کنید جهت های متناظر ولتاژ و جریان انتخاب شده اند درستی قضیه



تلگان، یعنی $\sum_{k=1}^{10} v_k i_k = 0$ را به دو طریق اثبات کنید، یعنی :

الف) با انتخاب یکدسته متغیرهای مستقل جریان شاخه :

ب) با انتخاب یکدسته متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه:

حل الف) $5 = 1 + 6 - 10 = 5$ = تعداد متغیرهای مستقل جریان

با منظور کردن $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_6)$ به عنوان متغیر مستقل جریان داریم :

$$1 \text{ گره } kcl : i_1 + i_6 + i_7 = 0 \rightarrow i_7 = -i_1 - i_6$$

$$2 \text{ گره } kcl : i_1 = i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \rightarrow i_5 = i_1 - i_2 - i_3 - i_4$$

$$3 \text{ گره } kcl : i_2 + i_{10} + i_6 = 0 \rightarrow i_{10} = -i_2 - i_6$$

$$\text{گره ۴ } kcl : i_8 + i_7 + i_3 = 0 \rightarrow i_8 = -i_7 - i_3 \rightarrow i_8 = i_1 + i_6 - i_3$$

$$\text{گره ۵ } kcl : i_5 + i_9 = i_8 \rightarrow i_9 = i_8 - i_5 \rightarrow i_9 = i_1 + i_6 - i_3 - i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \\ \rightarrow i_9 = i_2 + i_4 + i_6$$

$$\sum_{k=1}^{10} v_k i_k \rightarrow v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 + v_7 i_7 + v_8 i_8 + v_9 i_9 + v_{10} i_{10} \\ = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 (i_1 - i_2 - i_3 - i_4) + v_6 i_6 + v_7 (-i_1 - i_6) + v_8 (i_1 + i_6 - i_3) \\ + v_9 (i_2 + i_4 + i_6) + v_{10} (-i_2 - i_6) = 0 \\ i_1 (v_1 + v_5 - v_7 + v_8) + i_2 (v_2 - v_5 + v_9 - v_{10}) + i_3 (v_3 - v_5 - v_8) + i_4 (v_4 - v_5 + v_9) \\ + i_6 (v_6 - v_7 + v_8 + v_9 - v_{10}) = 0$$

ضرایب جملات فوق همگی صفر می باشند چون مجموع پتانسیل های درون یک حلقه است.

پس قضیه تلگان برقرار است.

(ب) تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه ها برابر است با : $5 = 6 - 1 = 5$ - تعداد گره ها

بنابراین $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ را به عنوان متغیر مستقل ولتاژ انتخاب می کنیم :

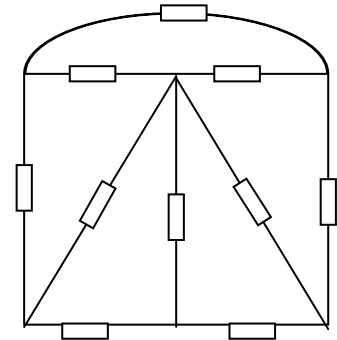
$$\text{حلقه ۱ } kcl : v_6 - v_2 - v_1 = 0 \rightarrow v_6 = v_2 + v_1$$

$$\text{حلقه ۲ } kcl : -v_7 + v_1 + v_3 = 0 \rightarrow v_7 = v_1 + v_3$$

$$\text{حلقه ۳ } kcl : -v_4 + v_2 - v_{10} = 0 \rightarrow v_{10} = v_2 - v_4$$

$$\text{حلقه ۴ } kcl : -v_3 + v_5 + v_8 = 0 \rightarrow v_8 = v_3 - v_5$$

$$\text{حلقه ۵ } kcl : -v_5 + v_4 + v_9 = 0 \rightarrow v_9 = v_5 - v_4$$



$$\sum_{i=1}^{10} v_k i_k = 0 \rightarrow$$

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 + v_7 i_7 + v_8 i_8 + v_9 i_9 + v_{10} i_{10} = 0 \\ v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + (v_1 + v_2) i_6 + (v_1 + v_3) i_7 + (v_3 - v_5) i_8 \\ + (v_5 - v_4) i_9 + (v_2 - v_4) i_{10} = 0 \\ v_1 (i_1 + i_6 + i_7) + v_2 (i_2 + i_6 + i_{10}) + v_3 (i_3 + i_7 + i_8) + v_4 (i_4 - i_9 - i_{10}) \\ + v_5 (i_5 - i_8 + i_9) = 0$$

چون هر کدام از ضرایب ولتاژها، مجموع جریان های مربوط به گره ای از مدار می باشد

بنابراین مجموع برابر صفر است.

۵- در مدار نشان داده شده در شکل مسئله ۴ همه ی حلقه های ممکن را مشخص کنید.

(۶-۲-۱)، (۱-۳-۷)، (۳-۵-۸)، (۵-۴-۹)، (۲-۱۰-۴)، (۱-۵-۸-۷)، (۲-۱۰-۹-۵)

(۳-۴-۹-۸)، (۱-۴-۱۰-۶)، (۱-۴-۹-۸-۷)، (-۳-۷-۶)، (۲-۳-۸-۹-۱۰)

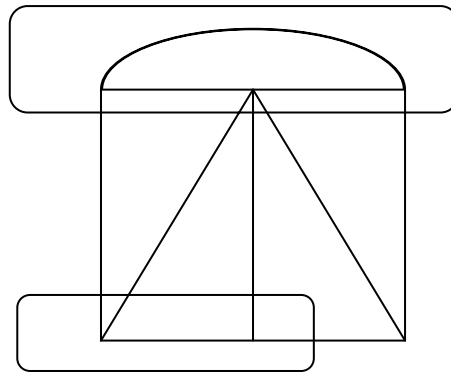
(۱-۶-۱۰-۹-۵)، (۲-۵-۸-۷-۶)، (۱-۲-۱۰-۹-۸-۷)، (۶-۱۰-۴-۳-۷)

(۶-۱۰-۹-۵-۳-۷)، (۶-۱۰-۴-۵-۶-۷)، (۶-۱۰-۹-۸-۷)

۶- در مدار نشان داده شده در شکل مسئله ۴ نشان دهید که :

$$kcl : i_3 + i_5 + i_7 + i_4 = i_{10}$$

$$kcl : i_3 + i_5 + i_7 + i_9 = 0$$



۷- الف- حلقه ای را که شاخه دورنی نداشته باشد. مشخص کنید. مش های مدار شکل مسئله ۴

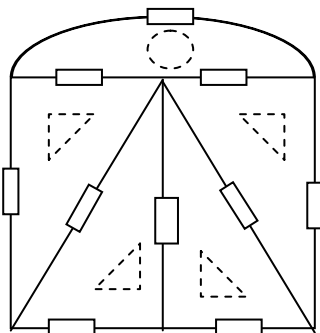
را تعیین کنید kvl را برای هر یک از آنها بنویسید.

ب- اکنون یک حلقه دلخواه را در نظر بگیرید. kvl را در آن حلقه بنویسید. نشان دهید که

معادله ی kvl این حلقه از ترکیب خطی معادلات kvl مش ها بدست می آید.

پ- از مطالب بیان شده در قسمت، چه نتیجه کلی می توان گرفت؟

(الف)



۱ برای مش $kvl : v_6 - v_2 - v_1 = 0$

۲ برای مش $kvl : v_1 + v_3 - v_7 = 0$

۳ برای مش $kvl: v_2 - v_{10} - v_4 = 0$

۴ برای مش $kvl: -v_3 + v_5 + v_8 = 0$

۵ برای مش $kvl: -v_5 + v_4 + v_9 = 0$

ب) حلقه شامل مش ۲ و ۴ را در نظر گرفته و معادله kvl مربوط به آن را می نویسیم:

$kvl: -v_7 + v_1 + v_5 + v_8 = 0$

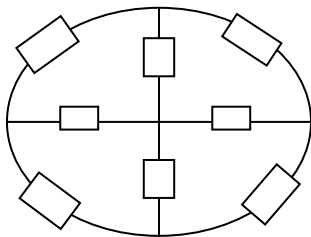
حال kvl مربوط به مش ۲ و ۴ را باهم ترکیب می کنیم:

$$\begin{cases} v_1 + v_3 - v_7 = 0 \\ -v_3 + v_5 + v_8 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 + v_5 + v_8 - v_7 = 0$$

پ) kvl مربوط به هر حلقه از ترکیب خطی kvl های مش های تشکیل دهنده ی آن حلقه

حاصل می شود.

۸- مطالب مطرح شده در مسائل ۴ و ۵ و ۷ در مورد مدار شکل زیر تکرار کنید.



حل) با توجه به مسائل قبل.

۹- الف- در مدار شکل آیا جریان های i_1, i_2, i_3, i_4 مستقل از هم هستند؟ جریان های

i_5, i_6, i_7, i_8 چگونه؟

ب- تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه چند تاست؟ به متغیرهای ولتاژ $i_1, i_2, i_3, i_4, v_7, v_9$

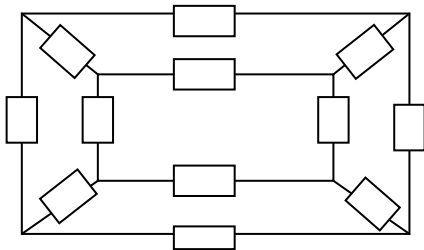
کدام ولتاژها را اضافه کنیم تا یکدسته متغیر مستقل ولتاژ شاخه تشکیل دهند؛ یعنی بتوان ولتاژ هر

شاخه ی دیگر را برحسب ترکیب خطی آنها نوشت:

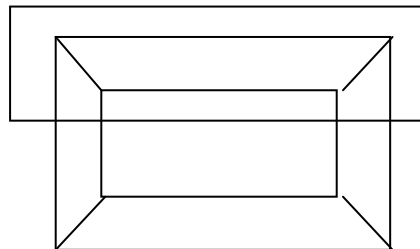
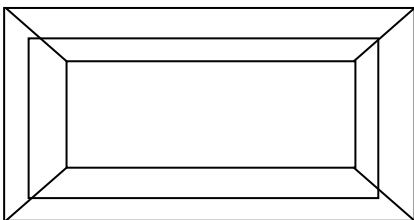
پ- تعداد متغیرهای مستقل جریان چند تاست؟ به متغیرهای جریان i_1, i_2, i_4 و i_6

کدام جریان ها را اضافه کنیم تا یکدسته متغیر مستقل جریان شاخه تشکیل دهند؛ یعنی بتوان جریان هر

شاخه ی دیگر را برحسب ترکیب خطی آنها نوشت:



(حل الف)



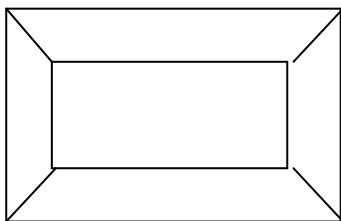
هر دودسته از جریان ها هر کدام به یک گره مرکب وصل اند پس مستقل نیستند.

(حل ب) $7 = 8 - 1 =$ تعداد گره = تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ

شش متغیر ولتاژ را که در صورت سؤال مطرح شده در گراف مدار پررنگ می کنیم متغیر

هفتم باید طوری انتخاب شود که شامل هیچ حلقه پررنگی نباشد.

پس به جز v_8 و v_{10} بقیه شاخه ها را می توان به عنوان متغیر هفتم انتخاب نمود.

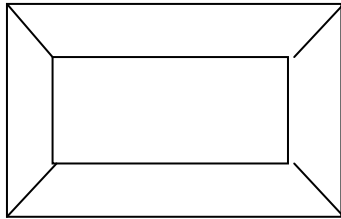


(پ)

$5 = 12 - 8 + 1 =$ تعداد متغیرهای مستقل جریان

چهار متغیر داده شده در صورت سؤال را پررنگ کرده، متغیر پنجم را باید به گونه ای انتخاب

کنیم که تشکیل گره ساده یا مرکب دهد.



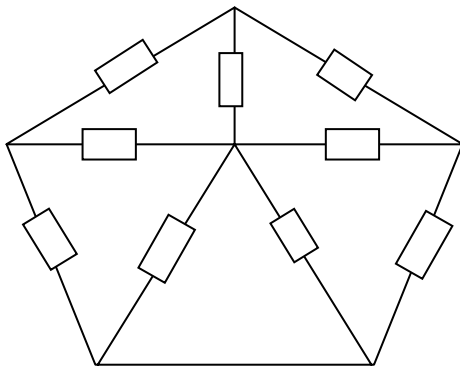
بنابراین متغیر پنجم نمی تواند i_9, i_{11}, i_3 انتخاب شود.

۱۰-الف- در مدار شکل جریان شاخه هایی را که می توانید حساب کنید بدست آورید:

ب- دسته ای از شاخه ها را مشخص کنید که اگر جریان هر کدام از آنها معلوم باشد، جریان

تمام شاخه های مدار را بتوان با توجه به مقادیر داده شده در شکل بدست آورد.

حل الف)



$$2 \text{ گره } kcl: 1 = 3 + i_1 \rightarrow i_1 = -2A$$

$$3 \text{ گره } kcl: i_1 = i_6 + 1 \rightarrow i_6 = -3A$$

$$4 \text{ گره } kcl: 1 = 2 + i_3 \rightarrow i_3 = -1A$$

سایر گروه ها دارای دو مجهول بوده و قابل حل نمی باشد.

ب)

$$5 = 10 - 6 + 1 = \text{تعداد متغیرهای مستقل جریان}$$

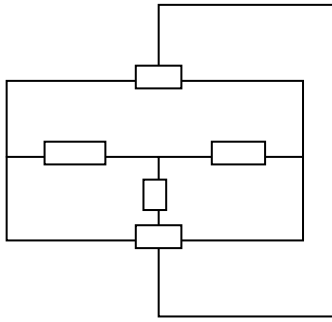
چهار متغیر جریان معلوم است بنابراین با توجه به حل قسمت الف) جریانهای i_6, i_3, i_1

به چهار متغیر جریان معلوم و وابسته اند پس آنها را نمی شود به عنوان متغیر پنجم انتخاب نمود.

۱۱- قوانین کبرشلف را نه تنها در تمام مدارهای با عنصر دو سرنوشت بلکه می توان در مدار

با عناصر سه سر و چهار سر است با انتخاب متغیرهای مناسب ولتاژ و جریان قوانین kvl و kcl را در این

مدار بنویسید.



$$1 \text{ گره } kcl : i_3 = i_5 + i_6$$

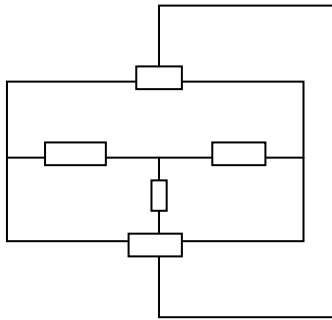
$$2 \text{ گره } kcl : i_5 + i_8 = i_9$$

$$3 \text{ گره } kcl : i_4 = i_7 + i_8$$

$$4 \text{ گره } kcl : i_{10} = i_{11}$$

$$5 \text{ گره } kcl : i_1 = i_2$$

$$6 \text{ گره } kcl : i_1 = i_{12}$$



$$1 \text{ حلقه برای } kvl : v_3 + v_5 - v_8 = 0$$

$$2 \text{ حلقه برای } kvl : v_8 + v_4 + v_7 = 0$$

$$3 \text{ حلقه برای } kvl : -v_5 - v_6 - v_4 = 0$$

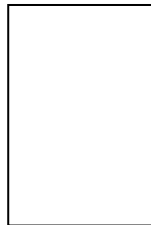
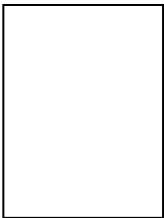
$$4 \text{ حلقه برای } kvl : -v_1 - v_9 = 0$$

$$5 \text{ حلقه برای } kvl : -v_2 - v_8 = 0$$

۱۲- فرض کنید یک مدار را بتوانیم به قسمت هایی چنان تقسیم کنیم که این قسمت ها توسط

شاخه هایی با جریان های i_1, i_2, \dots, i_m به هم وصل شده باشند نشان دهید. $i_1, i_2, \dots, i_m = 0$

$$\text{برای گره مرکب } kcl : i_1, i_2, \dots, i_m = 0$$



۱۳- در مدار شکل همهی شاخه ها از منبع ولتاژ و جریان وابسته تشکیل شده اند و ولتاژ و جریان

تمام شاخه ها را بدست آورید. و یقین کنید که کدام منبع توان تحویل می گیرد و نشان دهید اصل بقاء

توان برقرار است.

$$A \text{ گره } kcl: i_1 + i_2 = 0 \rightarrow i_1 = -i_2 = -1A$$

$$B \text{ گره } kcl: i_2 = i_3 \rightarrow i_3 = 1A$$

$$E \text{ گره } kcl: i_1 + i_4 = i_5 \rightarrow -1 + i_4 = 3 \rightarrow i_4 = 4A$$

$$D \text{ گره } kcl: i_5 + i_6 + i_7 = 0 \rightarrow 3 + i_6 + 2 = 0 \rightarrow i_6 = -5A$$

$$۱ \text{ حلقه } kcl: -v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \rightarrow -1 + v_2 + 2 + 4 = 0 \Rightarrow v_2 = -5v$$

$$۲ \text{ حلقه } kcl: -v_4 + v_6 - v_5 = 0 \rightarrow v_5 = -4 + 3 \Rightarrow v_5 = -1v$$

$$۳ \text{ حلقه } kcl: -v_6 + v_7 = 0 \rightarrow v_6 = v_7 \Rightarrow v_7 = 3v$$

حال به محاسبه توان شاخه می پردازیم :

$$P_{AB} = P_1 = v_1 i_1 = (1)(-1) = -1w \quad \text{توان نحویل می دهد.}$$

$$P_{AB} = P_2 = v_2 i_2 = (-5)(1) = -5w \quad \text{توان نحویل می دهد.}$$

$$P_{BC} = P_3 = v_3 i_3 = (2)(1) = 2w \quad \text{توان تحویل می گیرد.}$$

$$P_{CE} = P_4 = v_4 i_4 = (4)(4) = 16w \quad \text{توان تحویل می گیرد.}$$

$$P_{ED} = P_5 = v_5 i_5 = (-1)(3) = -3w \quad \text{توان نحویل می دهد.}$$

$$P_{CD} = P_6 = v_6 i_6 = (3)(-5) = -15w \quad \text{توان نحویل می دهد.}$$

$$P_{CD} = p_7 = v_7 i_7 = (3)(2) = 6w \quad \text{توان تحویل می گیرد.}$$

با جمع مقادیر بدست آمده اصل بقاء توان قابل اثبات است:

$$\sum_{k=1}^7 p_k = \sum_{i=1}^7 v_k i_k = 0$$

۱۴- در مدار شکل توان تحویل داده شده به هر یک از چهار جعبه نشان داده شده را تعیین کنید.

درستی اصل بقاء توان را در این مدار بررسی کنید.

$$\text{گره ۱ } kcl: i_1 + i_4 = 0 \rightarrow i_4 = -2A$$

$$\text{گره ۲ } kcl: i_1 = i_2 + i_3 \rightarrow i_2 = i_1 - i_3 = 2 - 3 = -1A$$

$$\text{حلقه ۱ } kcl: -v_4 + v_1 + v_3 = 0 \rightarrow -2 + v_1 + 4 = 0 \Rightarrow v_1 = -2v$$

$$\text{حلقه ۲ } kcl: -v_3 + v_2 = 0 \rightarrow v_2 = v_3 \Rightarrow v_3 = 4v$$

$$p_1 = v_1 i_1 = (-2)(2) = -4w$$

$$p_2 = v_2 i_2 = (4)(-1) = -4w$$

$$p_3 = v_3 i_3 = (4)(3) = 12w$$

$$p_4 = v_4 i_4 = (2)(-2) = -4w$$

طبق اصل بقای توان داریم:

$$\sum_{k=1}^4 p_k = -4 - 4 + 12 - 4 = 0$$

